



KTH Numerisk analys  
och datalogi

# Simulering av ljudvågor med tillämpning inom datorspel

DANIEL VON WITTING  
ALEXANDER AURELL

Kandidatexamensarbete vid Numerisk Analys  
Handledare: Henrik Holst  
Examinator: Ninni Carlsund Levin

TRITA-NA 2012:9



## Sammanfattning

Dagens datorspel erbjuder inte sällan en hög nivå av realism. En viktig källa till detta är att simuleringen av grafiken har förbättrats enormt sedan introduktionen av 3D grafikacceleratorer, eller GPU (Graphics Processing Unit). En stor utmaning för framtida generationer av datorspel är att simulera realistisk ljudutbredning i realtid. I detta arbete presenteras en metod för ljudsimulering som är både beräkningsmässigt effektiv och ger en ökad upplevd realism. Metoden går ut på att adaptivt approximera en given geometri i rektanglar, varefter den akustiska vågekvationen löses i dessa med en effektiv spektral metod. Metoden lämpar sig väl för implementering på en grafikprocessor där sådana metoder har en hög effektivitet. Tiden för att hantera ljudsimuleringen kan på så sätt reduceras väsentligt. I metoden så är rektanglarnas kanter randvillkor till vågekvationen, vilket ställer krav på realistiska beteenden såsom reflektion och absorption. Metoden testas genom ett flertal numeriska experiment. Dels ett absorptionsexperiment där vågens energi betraktas. Det fysikaliskt korrekta sambandet att energin är proportionell mot amplituden i kvadrat observeras. I två andra numeriska experiment i 2D genomförs simuleringar som illustrerar diffraktion och dopplereffekt. Diffraktion är ett frekvensberoende fenomen som beskriver huruvida ett ljud fortplantar sig runt hörn. Dopplereffekten, som är en förskjutning i tonhöjden hos ljudet, uppstår när ljudkälla och mottagare rör sig i förhållande mot varandra. En diskussion med exempel följer om de begränsningar som finns med att simulera ljud med den linjära akustiska vågekvationen. Även de absorberande randvillkorens fysikaliska riktighet i 2D tas upp i diskussionen. I verkligheten sker reflektion och absorption vid alla infallsvinklar. De absorberande randvillkoren i modellen simulerar absorption väldigt bra vid normal infallsvinkel men ju längre man avviker från detta desto sämre blir simuleringen. Vissa materials dispersion är frekvensberoende och detta beroende kommer påverka absorption av ljud.

# Innehåll

<b>Innehåll</b>	<b>iv</b>
<b>1 Introduktion</b>	<b>1</b>
<b>2 Bakgrund</b>	<b>3</b>
2.1 Härledning av vågekvationen . . . . .	3
2.2 Randvillkor till vågekvationen . . . . .	5
2.3 Fouriertransformen . . . . .	7
2.4 Ljudvågor i datorspel . . . . .	8
2.4.1 Numeriska metoder . . . . .	8
2.4.2 Ray tracing . . . . .	8
2.5 Aktuell forskning . . . . .	9
<b>3 Metod</b>	<b>11</b>
3.1 Uppdelning av domänen . . . . .	11
3.2 Tidsstegning . . . . .	13
3.2.1 Inhomogena randvillkor . . . . .	13
3.2.2 Absorberande randvillkor . . . . .	14
3.3 Stabilitetsvillkor . . . . .	15
<b>4 Numeriska experiment</b>	<b>17</b>
4.1 1D experiment . . . . .	17
4.2 2D experiment . . . . .	20
4.2.1 Diffraction . . . . .	20
4.2.2 Dopplereffekten . . . . .	21
<b>5 Diskussion</b>	<b>25</b>
5.1 Vågekvationen . . . . .	25
5.2 Randvillkor . . . . .	26
5.2.1 Vågens infallsvinkel . . . . .	26
5.2.2 Frekvensberoende absorbtion . . . . .	26
5.2.3 Dirichlet- eller Neumannvillkor? . . . . .	27
5.2.4 Hörn . . . . .	27

INNEHÅLL

v

**Litteraturförteckning**

**29**



# Kapitel 1

## Introduktion

Idag är vi väldigt vana vid realistiska grafikmotorer i tv- och datorspel. Detta inkluderar interaktiva miljöer och objekt, som tillfredsställande simulerar verkligheten. Främst är det grafikprocessorn (GPU) i dagens hemmadatorer som gjort denna utveckling möjlig. Skillnaden mellan en GPU och centralprocessorn (CPU) är att GPU:n har möjlighet att arbeta mer parallellt vilket är en stor fördel vid operationer så som matricmultiplikation. Detta gör det möjligt att rendera grafik i realtid. Ljudet har däremot inte följt samma utveckling. Att simulera realistiskt ljud i realtid, vilket är ett självklart krav för ett datorspel, är utmanande. Detta på grund av ljudvågors relativt låga propageringshastighet, som ger fenomen så som diffraktion, eko och efterklang.

Tanken med denna rapport är att studera huruvida det är möjligt att skapa en ljudmotor som löser den akustiska vågekvationen med en spektral metod och därmed skapa en realism som både förhöjer upplevelsen och underlättar implementeringen. För att beskriva interaktionen mellan ljudvågen och en vägg vid reflektion så tas ett absorberande randvillkor fram. Då alla material till viss grad är absorberande, och detta har en stor inverkan på ljudbilden, så är denna absorberande förmåga hos en rand mycket viktig.





## Kapitel 2

# Bakgrund

För att simulera realistiskt ljud i ett datorspel behövs en fysikaliskt riktig modell. Den ska också vara effektiv nog för att kunna simulera ljud i realtid. Grunden för modellen i denna rapport är den linjära akustiska vågekvationen. I ett rum, i verkligheten så som i spelvärlden, gör inte temperaturen och trycket några större avvikelser från ett jämviktsläge. Under dessa förutsättningar utgör den linjära akustiska vågekvationen en mycket bra approximation av ljudutbredningen. Ekvationen beskriver utvecklingen av partikelpositionen  $u$  eller det akustiska trycket som funktion av positionen och tiden. Ekvationen lyder för positionen

$$u_{tt} - v^2 \Delta u = f, \quad (2.1)$$

där  $v$  är ljudhastigheten i det aktuella mediet och  $f(x, y, z, t)$  är en ljudkälla.

### 2.1 Härledning av vågekvationen

Störningar i tryck i fluidliknande medier beskrivs av Navier-Stokes ekvationer, tre icke-linjära partiella differentialekvationer. Ljud är inget annat än en sådan störning, fast med förhållandevis liten amplitud och därför approximativt linjär. Inom akustik bygger de flesta tillämpningar på den linjära teorin [1].

För att rättfärdiga användandet av vågekvationen presenteras en härledning som påvisar alla approximationer som behöver göras för att komma till den akustiska vågekvationen från Navier-Stokes ekvationer. Då det inte refereras tillbaka till någonting specifikt från denna härledning i resten av rapporten kan den läsas om intresse finns, annars kan läsaren med fördel hoppa till kapitel 2.2.

För härledningen behövs storheterna densiteten  $\rho$ , partikelhastigheten  $\Psi$  och trycket  $p$ . De tre rumsdimensionerna är  $x_i (i = 1, 2, 3)$  för domänen  $\Omega$ . Partikelhastigheterna  $\Psi_i$  svarar mot varsin riktning  $x_i$ . Utgångspunkten är kontinuitetsekvationerna för massa

$$\frac{\partial \rho \Psi_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.2)$$

och Eulers ekvationer för inkompressibel strömning

$$\rho \left( \frac{D\Psi}{Dt} \right) = -\nabla P \quad (2.3)$$

med viskositeten 0 och utan kontaktkrafter, som är en variant av Navier-Stokes ekvationer. Operatorn

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \Psi_j \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (2.4)$$

är materialderivatan och  $\nabla$  är gradienten.

Betrakta små störningar  $\delta\Psi$ ,  $\rho$  och  $\delta p$  motsvarande partikelhastigheten, densiteten och trycket från deras initialvärden som indexeras med 0

$$\Psi = \Psi_0 + \delta\Psi, \quad (2.5)$$

$$\rho = \rho_0 + \delta\rho, \quad (2.6)$$

$$p = p_0 + \delta p. \quad (2.7)$$

Initialhastigheten är  $\Psi_0 = 0$  eftersom domänen är i jämvikt. En fluids tryck beror av densiteten, temperaturen och gravitationskrafter. Det antas att gravitationskrafterna är konstanta och inte utövar någon kraft på fluiden. Temperaturförändringar negligeras också och alltså antas att endast densiteten är viktig.

Observera att  $P_0$  är konstant, Eulers ekvation blir då

$$\rho \left( \frac{D\Psi}{Dt} \right) = -\nabla(\delta p). \quad (2.8)$$

I initialläget är fluiden i vila och saknar konvektiv acceleration vilket tillåter oss att skriva om den materiella derivatan till en vanlig partiell derivata

$$\rho \left( \frac{\partial\Psi}{\partial t} \right) = -\nabla(\delta p). \quad (2.9)$$

Vidare är  $\Psi$  gradienten till  $u$  och det inses att produkten  $\delta\rho\nabla u$  kommer bli mycket liten. Genom insättning av approximationen (2.6) i (2.9) får vi

$$\rho_0 \left( \frac{\partial\nabla u}{\partial t} \right) = -\nabla(\delta p). \quad (2.10)$$

Som nästa steg antas att tid och rumsderivatorna kan byta ordning

$$\nabla\rho_0 \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) = -\nabla(\delta p), \quad (2.11)$$

vilket implicerar att

$$\rho_0 \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) = -\delta p. \quad (2.12)$$

Kompressibiliteten  $\kappa$  och elasticitetsmodulen  $K$  definieras i termer av enhetsvolymen  $V$  och volymförändringen  $\delta V$

$$\kappa = \frac{\delta\rho}{\rho} = - \left( \frac{\delta V}{V} \right), \quad (2.13)$$

$$\delta p = -K \left( \frac{\delta V}{V} \right). \quad (2.14)$$

Beräkning av tidsderivatan av föregående ekvation visar att en förändring av trycket är relaterat till en förändring i densiteten

$$\frac{\partial\delta p}{\partial t} = \frac{K}{\rho_0} \left( \frac{\partial\delta\rho}{\partial t} \right) \quad (2.15)$$

som används i kontinuitetsekvationen (2.2) vilket ger

$$\nabla^2 u = -\frac{1}{K} \left( \frac{\partial\delta p}{\partial t} \right). \quad (2.16)$$

Tar man tidsderivatan av ekvation (2.12) fås

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho_0 \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) \right) = - \left( \frac{\partial\delta p}{\partial t} \right). \quad (2.17)$$

Tillslut, genom att kombinera de två senaste ekvationerna, ges den akustiska vågekvationen

$$\nabla^2 u = \frac{1}{v^2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right), \quad (2.18)$$

där  $v = \sqrt{\frac{K}{\rho_0}}$  är ljudhastigheten i fluiden.

Det går att härleda samma ekvation för det akustiska trycket genom att utgå från den ideala gaslagen [2].

## 2.2 Randvillkor till vågekvationen

Lösningen till (2.18) i en dimension är given av d'Alemberts formel [3]

$$u(x, t) = f(ct - x) + g(ct + x), \quad (2.19)$$

där funktionerna  $f$  och  $g$  uppkommer från initialdata och randvillkor. Olika situationer ger olika villkor, nedan presenteras de två enklaste i en dimension. Antag att en sträng är fixerad i sin ena ände. Då är inte  $f$  och  $g$  längre godtyckliga utan deras summa måste vara noll för alla tider i den fixerade änden. Med änden i  $x = 0$  blir randvillkoret

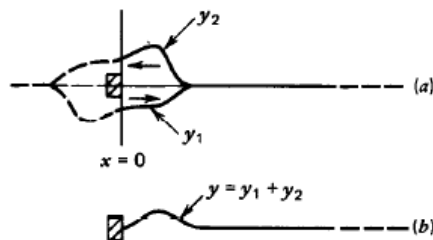
$$u(0, t) = f(ct - 0) + g(ct + 0) = 0, \quad (2.20)$$

vilket ger

$$f(ct - x) = -g(ct + x). \quad (2.21)$$

Villkoret kallas för ett Dirichletvillkor och tolkningen är att när en inkommande våg träffar randen (ändan på strängen), transformeras den till en våg som propagerar åt andra hållet med en fasförskjutning på  $\pi$  radianer [1]. Situationen illustreras i figur 2.1.

**Figur 2.1.** Reflektion vid en fast ände. Dirichletvillkor i  $x = 0$  [4].

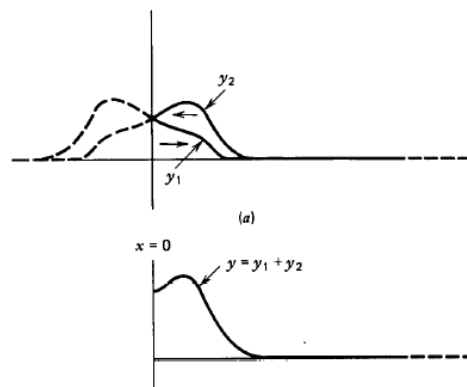


Antag att strängen istället inte sitter helt fast i  $x = 0$  utan tillåts att röra sig fritt i höjdlid. Situationen svarar mot att inga krafter verkar i höjdlid, transversellt, på strängen i  $x = 0$ . Detta brukar kallas för en fri ände, värdet på randen förändras men lutningen på vågen vid randen alltid är noll,  $u_x = 0$ . Randvillkoret som uppstår kallas Neumannvillkor och ger följande krav på  $f$  och  $g$

$$f(ct - x) = g(ct + x). \quad (2.22)$$

Vid studs mot rand med Neumannvillkor behåller vågen sin fas. Neumannvillkoret illustreras i figur 2.2.

**Figur 2.2.** Reflektion vid fri ände. Neumannvillkor i  $x = 0$  [4].



När vi angriper vårt problem måste det bestämmas vilka randvillkor som skall väljas för väggarna i våra simuleringar. Alla material är till en viss grad absorberande

i den meningen att ljudvågen tappar energi när den träffar väggen. Skriver man vågekvationen på operatorform

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) u = 0 \quad (2.23)$$

kan följande faktorisering göras

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - v \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x}\right) u = 0. \quad (2.24)$$

Faktorerna är en endast högergående respektive en endast vänstergående våg. Detta utnyttjas för att skriva ett absorberande villkor som säger att om en vänstergående våg träffar den vänstra randen kommer en skalad högergående våg att reflekteras

$$\begin{aligned} u_t - vu_x &= \alpha(u_t + vu_x) \\ \Rightarrow u_t - v \left(\frac{1 + \alpha}{1 - \alpha}\right) u_x &= 0, \quad \alpha \in [0, 1). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Reflektionsparametern  $\alpha$  kontrollerar den reflekterade vågens amplitud. Då  $\alpha \rightarrow 0$  så fås  $u_t - vu_x = 0$  d.v.s. ett perfekt absorberande randvillkor. Då  $\alpha \rightarrow 1$  kommer  $u_x$ -termen dominera och då fås  $u_x = 0$ , alltså full reflektion (Neumannvillkor).

Detta randvillkor kan utan några förändringar utvidgas till två dimensioner [5], men då får man vissa restriktioner på modellens realism. Dessa diskuteras i kapitel 5.1.

## 2.3 Fouriertransformen

Ett kraftfullt matematiskt redskap för att lösa partiella differentialekvationer, som den akustiska vågekvationen, är fouriertransformen. Fouriertransformen definieras som

$$\hat{f}(\omega) = \mathfrak{F}(f(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (2.26)$$

Om fouriertransformen appliceras på vågekvationen får vi en ordinär differentialekvation

$$\mathfrak{F}[u_{tt} - v^2 \Delta u] = \hat{u}_{tt} - v^2 (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \hat{u} = 0, \quad (2.27)$$

där  $k_x$ ,  $k_y$  och  $k_z$  är elementen i vågvektorn. Ekvationen kan då lösas i frekvensrymden och sedan transformeras tillbaka med den inversa fouriertransformen

$$f(t) = \mathfrak{F}^{-1}(\hat{f}(\omega)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} dt. \quad (2.28)$$

Fouriertransformen har en diskret motsvarighet, DFT (Discrete Fourier Transform),

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2i\pi \frac{k_x}{N} n}, \quad (2.29)$$

där  $N$  är antal punkter. Att utföra beräkningen ovan direkt enligt definitionen ger en beräkningskomplexitet proportionell mot  $N^2$ . Algoritmen FFT (Fast Fourier Transform) är en optimerad rutin för att beräkna DFT. Den har en bättre beräkningskomplexitet, proportionell mot  $N\log(N)$  tid, och en minnesåtgång proportionell mot  $N$ .

## 2.4 Ljudvågor i datorspel

Det finns generellt sett två olika typer av metoder för att simulera ljud idag [6]. Det ena sättet är att använda numeriska lösningar av den akustiska vågekvationen t.ex. finita element metoden, det andra är att högfrekvensapproximera ljudet baserat på att följa strålgången från källan. Genom att studera information om geometrin, skapas dessa strålgångar med metoder som t.ex. ray tracing. Det stora problemet är att all ljudsimulering, liksom grafiksimplering, i datorspel ska ske i realtid. Därför finns en tillåten beräkningstid som alltså indirekt reglerar hur kostsam simuleringen får vara. Att simulera fenomen såsom reflektion, diffraktion eller håligheter under denna begränsning är en utmaning.

### 2.4.1 Numeriska metoder

Dessa tekniker för att lösa vågekvationen och randvärdesproblem ger korrekta lösningar, men beräkningstiden samt minnesanvändningen ökar drastiskt för höga frekvenser. Den vanligast förekommande av dessa metoder är finita elementmetoden (FEM). Det finns huvudsakligen två krav på metoden för att få acceptabla resultat [7]. Det ena är att det största möjliga elementet måste vara åtminstone sex gånger mindre än våglängden hos ljudet. Därför blir det snabbt många element vid höga frekvenser. Det andra är att det uppstår problem när vågor interfererar, vilket är fallet i reflekterande miljöer. På grund av detta används FEM mest för låga frekvenser och enkla geometrier [6]. Numeriska metoder kan också implementeras för att modellera energiöverföring mellan ytor. Sådana tekniker har använts inom tillämpad akustik för att utveckla ljudsimulering för datorspel [8].

### 2.4.2 Ray tracing

Ray tracing är en tidig metod som användes redan 1958 för att modellera rumsakustik [9]. Här löser man inte vågekvationen, utan istället gör man en högfrekvensapproximation i form av strålar som propagerar i geometrin. Dessa strålar utbreder sig i olika riktningar i domänen och reflekteras, baserat på omgivningens egenskaper. När en samling strålar når mottagaren summerar man dessa och får då ett simulerat ljud av ljudkällan. Det finns olika metoder som använder denna tanke, alla med olika fördelar och nackdelar. För att nämna några så är fördelarna ofta att du får ett ljud som anpassar sig bra efter geometrin i domänen och att metoderna är enkla, ofta med sublinjär komplexitet [6]. Nackdelarna är dock att för att få ett bättre ljud, på en mer komplicerad geometri, krävs flera strålar och återigen är begränsningen

beräkningstiden. Det finns systematiska fel i metoden som uppträder på grund av begränsad beräkningstid och begränsat antal strålar [9]. Dessutom har denna ansats inte något direkt fysikaliskt ursprung, utan använder istället förväntade fysikaliska egenskaper hos omgivningen som strålarna propagerar i, t.ex. absorptionskoefficient på en vägg. Den största nackdelen är att ray tracing inte approximerar lågfrekventa vågor, vilket resulterar i t.ex. avsaknad av diffraktion.

## 2.5 Aktuell forskning

Den senaste forskningen har bland annat gått ut på att få ner beräkningstiden för tracing, samt utveckla nya tracingmetoder och utvidga dessa för att lösa kända problem med tracing. En huvudsaklig anledning är att GPU:erna i dagens datorer gör liknande operationer för ljus och grafik. Därför kan mycket prestanda vinnas om man lyckas att effektivt använda delar av grafiksimuleringen till att samtidigt behandla ljudutbredningen [10]. Detta gäller dock inte bara ray tracing, utan samma typ av lösning skulle gynna andra metoder med sämre komplexitet. GPU:er kan utföra fler operationer parallellt än vad en CPU kan. Hur mycket snabbare en beräkning blir på GPU:n är olika från fall till fall och beror på hur mycket av koden som kan parallelliseras och hur optimerad koden är. Intel hävdar att en GPU i snitt är två och en halv gånger snabbare än en CPU [11] medan det finns exempel på upp till 300 gånger snabbare beräkningar [12]. Om man skulle kunna avlasta CPU:n, som är den processor som utför bland annat ljudsimuleringar, kan man tjäna mycket beräkningstid, speciellt i realtidsberäkningar [13].

Det finns även andra tillvägagångssätt som istället räknar ut en del av ljudutbredningen i olika miljöer i förväg, vilket i dagsläget kräver mer tid och minne än vad som är acceptabelt. För att få ned beräkningstiden och minneskravet till en praktiskt nivå försöker man utnyttja människans auditiva perception för att få spelaren att uppfatta ljudet på ett realistiskt sätt, och kan på så sätt reducera beräkningskostnaden. [14].





# Kapitel 3

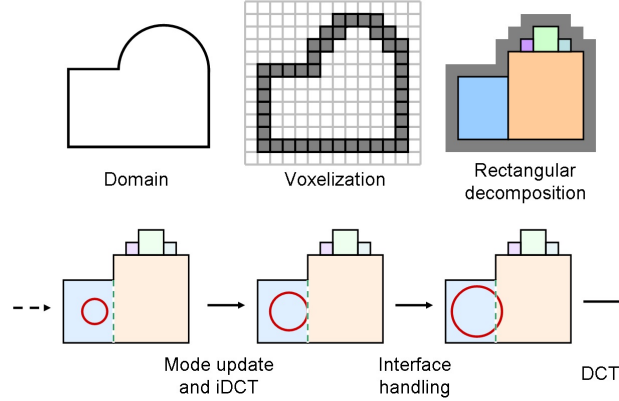
## Metod

I detta kapitel beskrivs hur en våglösare byggs från idéerna i kapitel 2. Först kommer en sammanfattning av metoden, sedan följer mer ingående utläggningar om de olika delarna av metoden. Alla härledningar görs i en dimension, för enkelhetens skull. En utvidgning till två eller tre dimensioner kan göras utan större svårigheter.

Genom en uppdelning av domänen i rektanglar så kan vågekvationen lösas effektivt med en spektral metod. Detta sparar mycket beräkningskraft och är en nödvändighet för att kunna utföra simuleringen i realtid. För det första så krävs färre diskretiseringspunkter per våglängd, för det andra så kommer man till viss del runt Courant-Friedrichs-Lewy-villkoret (se kapitel 3.3). Uppdelningen i rektanglar görs för att optimera domänen för spektrala metoder, då rektanglar ger upphov till egenfunktioner på cosinusform [15]. Detta ger oss möjligheten att använda Discrete Cosine Transform (DCT), en form av DFT från kapitel 2.3. Rektanglars ränder kan antingen vara en vägg, eller en annan rektangel. Vid händelsen att randen är en vägg sätts ett absorberande randvillkor (se kapitel 3.2.2), är randen en annan rektangel så skapas en kommunikation mellan dessa rektanglar (se kapitel 3.1).

### 3.1 Uppdelning av domänen

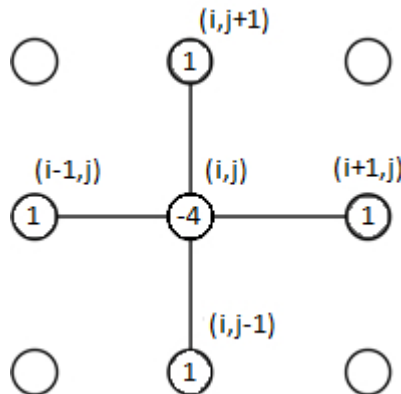
När en spelplan är given så delas denna in i rektanglar. De kan vara olika stora och ha olika mått. Detta illustreras i den övre delen av figur 3.1. Geometrin antas vara tidsberoende. Det numeriska schemat räknas i varje tidssteg ut för alla rektanglar men för att vågen ska kunna propagera mellan rektanglar behövs ett kommunicerande villkor.

**Figur 3.1.** Domänen delas upp i rektanglar [15].

På dessa delade ränder måste vågfunktionen (2.18) vara uppfylld. En diskretisering för tiden  $n + 1$  i punkten  $(i, j)$  ger

$$\frac{u_{i+1,j}^n + u_{i-1,j}^n + u_{i,j+1}^n + u_{i,j-1}^n - 4u_{i,j}^n}{(\Delta x)^2} = \frac{u_{i,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^n + u_{i,j}^{n-1}}{(\Delta t)^2 v^2}. \quad (3.1)$$

Vi ser på högerledet att om punkten ligger på en delad rand så behöver den värden från minst två rektanglar, vilket också kan ses i figur 3.2 där den diskreta laplaceoperatorn illustreras. Detta löses genom att alla punkter som hör till en delad rand tilldelas en av de gränsande rektanglarna. Sedan uppdateras dessa delade ränder med (3.1) efter att vågen tidsstegats i det inre av rektanglarna, enligt nedre delen i figur 3.1.

**Figur 3.2.** Laplaceoperatorn behöver alltid punkter från minst två rektanglar om en punkt ligger på en delad rand.

## 3.2 Tidsstegning

Vi återgår nu till en dimension och sätter upp ett numeriskt schema för vågekvationen

$$u_{tt} - v^2 u_{xx} = f \quad (3.2)$$

i det inre av domänen  $[0, L]$  och det absorberande randvillkoret (2.25) på randen. Då en andraderivata i tiden finns med i (3.2) måste de två första tidsstegen behandlas speciellt. För att det ens ska vara möjligt att lösa vågekvationen så behöver vi initialvärdet  $u(x, 0) = u_0(x)$  och initialderivatan  $u_t(x, 0) = u_1(x)$ . Initialvärdet  $u_0(x)$  ger oss det första tidssteget. Nästa tidssteg,  $\Delta t$  fram i tiden, approximeras med hjälp av en Taylorutveckling kring  $t = 0$

$$u(x, \Delta t) = u(x, 0) + u_t(x, 0)\Delta t + u_{tt}(x, 0) \left( \frac{\Delta t^2}{2} \right) + O(\Delta t^3). \quad (3.3)$$

Vi utnyttjar (3.2) och att initialläget och initialderivatan är känt för alla  $x$

$$u(x, \Delta t) = u_0(x) + u_1(x)\Delta t + \left[ f(x, \Delta t) + v^2 \left( \frac{\partial^2 u_0(x)}{\partial x^2} \right) \right] \left( \frac{\Delta t^2}{2} \right) + O(\Delta t^3). \quad (3.4)$$

För att se vad som händer efter detta måste randvillkoren in i metoden.

### 3.2.1 Inhomogena randvillkor

För att vår metod ska kunna behandla absorberande randvillkor spektralt måste vi först utveckla den för inhomogena randvillkor. Då är problemet givet som

$$\begin{cases} u_{tt} - v^2 u_{xx} = f \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) \\ u_t(0, t) = g_1(t), \quad u_t(L, t) = g_2(t). \end{cases} \quad (3.5)$$

Standardmetoden för att angripa inhomogena randvillkor är att dela upp vågfunktionen  $u$ ,

$$u(x, t) = q(x, t) + w(x, t) \quad (3.6)$$

i en  $[0, L]$ -periodisk del,  $q$ , som uppfyller vågekvationen med homogena randvillkor och en del  $w$  som uppfyller de inhomogena randvillkoren. Att  $w$  ska uppfylla randvillkoren är det enda kravet på  $w$  och därför väljs  $w$  till en så enkel funktion som möjligt

$$w(x, t) = - \left( \frac{(L-x)^2}{2L} \right) g_1(t) + \left( \frac{x^2}{2L} \right) g_2(t), \quad (3.7)$$

så att  $w$  är känd för alla tider och positioner. På grund av uppdelningen fås för  $q$  en källterm

$$q_{tt} - v^2 q_{xx} = u_{tt} - v^2 u_{xx} + f - (w_{tt} - v^2 w_{xx}) = v^2 w_{xx} - w_{tt} + f, \quad (3.8)$$

där vi utnyttjat att  $u$  uppfyller (3.2). Nästa avsnitt kommer visa hur man kan använda denna uppdelning för att få fram ett uttryck för det inre av en rektangel under påverkan av absorberande randvillkor.

### 3.2.2 Absorberande randvillkor

För att modellera en trovärdig miljö måste randen absorbera en given del av ljudet. Med det absorberande randvillkoret (2.25) och uppdelningen i kapitel 3.2.1 knyts i detta kapitel säcken ihop. Då hastigheten för vågen är i motsatt riktning vid den högra randen,  $x = L$ , jämfört med vid den vänstra randen,  $x = 0$ , så byter  $v$  tecken där. Vi definierar

$$\beta = \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \quad (3.9)$$

och de absorberande randvillkoren blir

$$\begin{cases} u_x(0, t) = \frac{1}{v\beta} u_t(0, t) \\ u_x(L, t) = -\frac{1}{v\beta} u_t(L, t). \end{cases} \quad (3.10)$$

Med  $u$ ,  $q$  och  $w$  som i kapitel 3.2.1 väljes nu

$$\begin{cases} g_1(t) = \frac{1}{v\beta} u_t(0, t) \\ g_2(t) = -\frac{1}{v\beta} u_t(L, t) \end{cases} \quad (3.11)$$

för att  $u = q + w$  ska uppfylla de absorberande randvillkoren.

Från (3.8) vet vi att vid uppdelning av vågekvationen får den periodiska delen,  $q$ , en källterm som beror av delen som uppfyller randvillkoren,  $w$ , och ljudkällan  $f$ ,

$$q_{tt} - q^2 v_{xx} = -w_{tt} + v^2 w_{xx} + f \quad (3.12)$$

och att

$$w = \left( \frac{x^2}{2L} \right) g_2(t) - \left( \frac{(L-x)^2}{2L} \right) g_1(t). \quad (3.13)$$

Vi härleder ett uttryck för  $w_{tt}$

$$\begin{cases} w_{tt} = \left( \frac{x^2}{2L} \right) g_2''(t) - \left( \frac{(L-x)^2}{2L} \right) g_1''(t) \\ g_1''(t) = \frac{1}{v\beta} u_{ttt}(0, t) = \frac{v}{\beta} (u_t)_{xx}(0, t) \\ g_2''(t) = -\frac{1}{v} u_{ttt}(L, t) = -\frac{v}{\beta} (u_t)_{xx}(L, t), \end{cases} \quad (3.14)$$

och ett för  $w_{xx}$

$$w_{xx} = \frac{1}{L} [g_2(t) - g_1(t)] = \frac{1}{L} [u_t(L, t) - u_t(0, t)]. \quad (3.15)$$

Nu kan vågekvationen skrivas upp för den periodiska delen  $q$  med en källterm endast beroende utav  $u$  och  $f$

$$\begin{aligned} q_{tt} - v^2 q_{xx} = & \left( \frac{(L-x)^2}{2L} \right) (u_t)_{xx}(0, t) - \left( \frac{x^2}{2L} \right) (u_t)_{xx}(L, t) \\ & + \left( \frac{v^2}{L} \right) [u_t(L, t) - u_t(0, t)] + f(x, t). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Då  $w$  är känt i varje tidssteg och position och  $q$  är periodisk över  $[0, L]$  kan vi använda den diskreta fouriertransformen för att lösa detta i våra rektanglar.

Vi kan nu sammanfatta metoden:

1. Dela upp den givna spelplanen i rektanglar
2. Placera ljudkälla
3. För varje tidssteg  $n$ 
  - a) Om ljudkälla i rörelse, flytta ljudkälla
  - b) Transformera varje rektangel
  - c) Tidsstega vågekvationen i varje rektangel
  - d) Inverstransformera varje rektangel
  - e) Hantera delade ränder
  - f) Hantera övringa ränder
  - g)  $n = n + 1$  och börja om från 3.

Om  $\alpha$  skulle vara nära 1 så sparar man beräkningkraft genom att sätta in ett Neumannvillkor istället för det absorberande randvillkoret. En annan besparing man kan göra är implementera ett frekvensfilter för (3.16). Normalt behöver simuleringen bara köras för ljud upp till en frekvens på 15kHz, eftersom människans övre gräns för hörbara frekvensen ligger ungefär där. Då fler diskretiseringspunkter behövs för högre frekvenser sänks  $i$  och med detta beräkningstiden.

### 3.3 Stabilitetsvillkor

Stabilitet för ett numeriskt schema definieras som

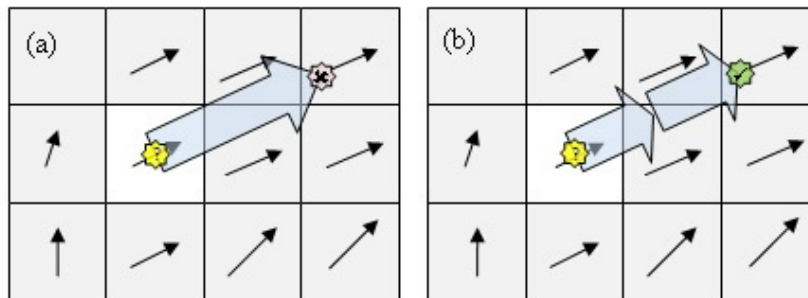
$$\sum_m (u_m^n)^2 \leq A(T) \sum_m (u_m^0)^2, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad N\Delta t = T, \quad (3.17)$$

för någon konstant  $A(T)$  som är oberoende av  $n$ , där  $\Delta t$  är tidssteget och  $T$  sluttiden [16]. Det finns ett nödvändigt men inte tillräckligt villkor för stabilitet när man ska lösa vågekvationen med finita differensmetoder, kallat Courant-Friedrichs-Lewyvillkoret (CFL). Villkoret säger oss att givet en rumsdiskretisering  $\Delta x$  så ska inte ett större tidssteg  $\Delta t$  tas än rumssteget delat med våghastigheten  $v$

$$\frac{v\Delta t}{\Delta x} \leq C. \quad (3.18)$$

För explicita diskretiseringar är  $C \leq 1$  och det betyder att tidssteget måste vara mindre än tiden det tar för mediet att ta sig från en gridpunkt till nästa. Ett diskret 'ljuskonsvillkor' som ser till att saker som inte kan nå varandra på grund av informationshastigheten, inte kan påverka varandra [17]. Detta illustreras i figur 3.3.

**Figur 3.3.** I (a) är tidssteget för långt och det numeriska schemat kommer inte vara stabilt. Om tidssteget kortas ned, (b), så uppfylls CFL och schemat är stabilt [18].



Detta är förhållandevis lätt uppfyllt i våra simuleringar om vi skulle använda oss av finita differenser. Om  $\Delta x$  minskas så ska  $\Delta t$  minskas linjärt. Detta är ändå en hård begränsning och en av huvudorsakerna till att gå över till en spektral lösningsmetod.

## Kapitel 4

# Numeriska experiment

För att utvärdera modellen har numeriska experiment genomförts. En förenklad numerisk metod har använts. I detta kapitel presenteras först ett experiment för att kontrollera randvillkorens fysikaliska riktighet och sedan två för att påvisa hur vågekvationen ger oss fenomen 'gratis', som med andra metoder skulle fått behandlas i efterhand.

### 4.1 1D experiment

I detta experiment implementeras en absorberande rand till en domän  $[0,L]$  i en dimension. Randvillkoret vid  $x = 0$  är enligt (2.25)

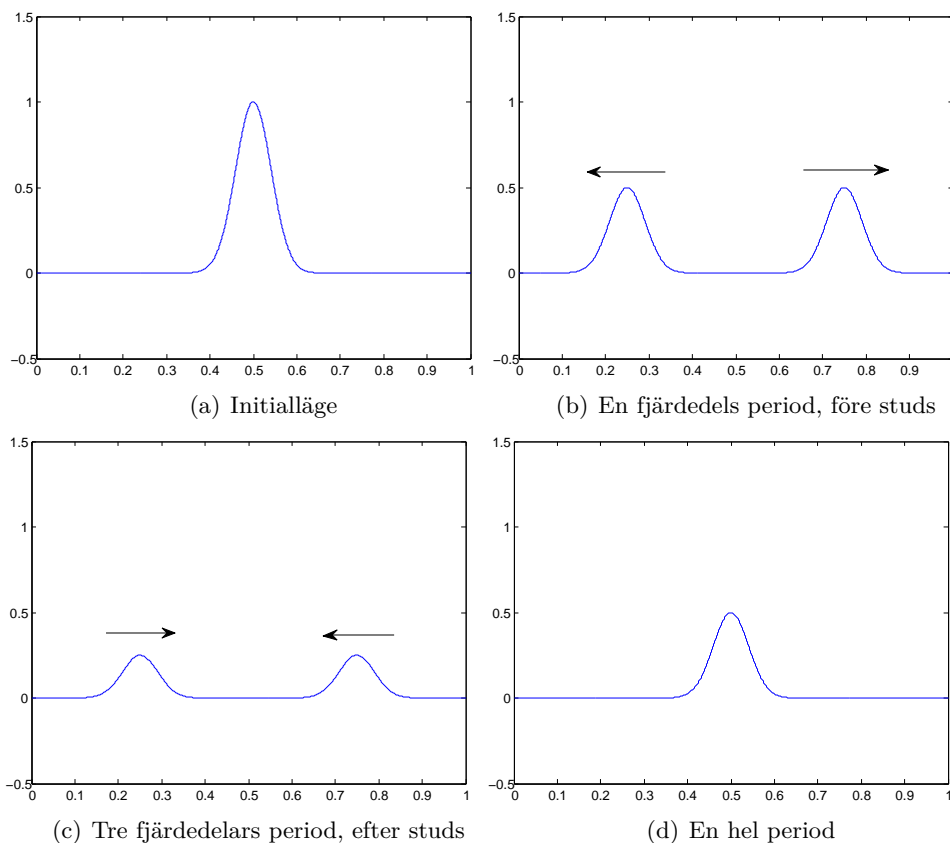
$$u_t - v\beta u_x = 0, \quad (4.1)$$

$\beta$  som i definitionen (3.9). En diskretisering av (4.1) med en ensidig implicit differensapproximation görs

$$\begin{aligned} \frac{u_0^n - u_0^{n-1}}{\Delta t} &= v\beta \left( \frac{u_1^n - u_0^n}{\Delta x} \right) \\ \Rightarrow u_0^n &= \frac{v\beta u_1^n + u_0^{n-1}}{1 + \beta\sigma}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Samma sak görs för randen  $x = L$ , dock med teckenbyte mellan  $u_t$  och  $u_x$  i (4.1) eftersom vågens utbredningshastighet där har motsatt riktning. För att bedöma om resultatet är fysikaliskt korrekt mäts sedan vågens energi före och efter studsens mot randen. Om vi halverar amplituden i studsens,  $\alpha = 0.5$ , så borde energin reduceras till en fjärdedel. I figur 4.1 presenteras resultatet av simuleringen med  $\alpha = 0.5$ . Vågens energi mäts med en energiintegral, här följer en härledning. Vi vill jämföra energin för vågen före och efter den absorberande studsens. Se dessa två instanser av vågen som två skilda vågor med randvillkor av Neumannstyp,

$$u_x|_{x=0} = u_x|_{x=L} = 0. \quad (4.3)$$

**Figur 4.1.** Simulering av en hel period med absorberande randvillkor.

Låt oss betrakta en sträng med konstant densitet  $\rho$  och spänningsmagnituden  $T$ . Vågekvationen blir då som i kapitel 2.1

$$\rho u_{tt} = T u_{xx}, \quad 0 \leq x \leq L. \quad (4.4)$$

Eftersom ekvationen beskriver den mekaniska rörelsen av en vibrerande sträng kan strängens kinetiska energi beräknas. Vi erinrar oss att den kinetiska energin är  $\frac{1}{2}mv^2$ . Hastigheten kommer variera över strängens längd, men om energin beräknas för mycket små bitar, summeras och gör i gränsen då bitarna blir infinitesimalt små, fås följande integral

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \int_0^L \rho u_t^2 dx. \quad (4.5)$$

Det intressanta är om den kinetiska energin  $E_{kin}$  är konserverad i tiden. Därför differentierar vi (4.5) med avseende på tiden

$$\frac{d}{dt} E_{kin} = \frac{1}{2} \rho \int_0^L 2u_t u_{tt} dx = \int_0^L \rho u_t u_{tt} dx. \quad (4.6)$$



Om uttrycket ovan blir noll betyder det att den kinetiska energin är konserverad. I (4.6) ersätts  $\rho u_{tt}$  med  $Tu_{xx}$  enligt (4.4) och då fås

$$\frac{d}{dt}E_{kin} = T \int_0^L u_t u_{xx} dx. \quad (4.7)$$

Den senaste integralen verkar inte allmänt vara noll men om den skrivs om till en tidsderivata kommer skillnaden mellan  $E_{kin}$  vara konstant i tiden. Vi kan göra detta i några få steg, först genom partiell integrering av högerledet i (4.7)

$$\frac{d}{dt}E_{kin} = [Tu_t u_x]_0^L - \int_0^L Tu_{xt} u_x dx. \quad (4.8)$$

Den första termen i högerledet blir noll enligt (4.3). Eftersom totala energiförändringen i stötögonblicket är ointressant för vårt ändamål observeras endast hur mycket energi som har tappats i stöten. Den sista integralen är alltså en tidsderivata

$$\frac{d}{dt}E_{kin} = - \int_0^L Tu_{xt} u_x dx = - \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \int_0^L Tu_x^2 dx \right). \quad (4.9)$$

Vi definierar

$$E_{pot} = \frac{1}{2} \int_0^L u_x^2 dx, \quad (4.10)$$

och observerar att

$$\frac{d}{dt}(E_{kin} + E_{pot}) = 0. \quad (4.11)$$

Kvantiteten  $E_{tot} = E_{kin} + E_{pot}$ , den totala energin hos strängen, är således konserverad så länge vågen inte är nära kanten. Vi bildar vår energiintegral

$$E_{tot} = \frac{1}{2} \int_0^L (\rho u_t^2 + Tu_x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^L (u_t^2 + v^2 u_x^2) dx. \quad (4.12)$$

För att styrka påståendet i början av avsnittet att energin är proportionell mot amplituden i kvadrat, antag lösning till vågekvationen på formen  $\Psi(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)}$ . Då fås från ekvation (4.12)

$$\begin{aligned} E_{tot} &= \frac{1}{2} \int_0^L (\Psi_t^2 + v^2 \Psi_x^2) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L \left[ A^2 \left( \frac{\partial}{\partial t} e^{i(kx - \omega t)} \right)^2 + v^2 A^2 \left( \frac{\partial}{\partial x} e^{i(kx - \omega t)} \right)^2 \right] dx \\ &= \frac{1}{2} A^2 \int_0^L h(x, t) dx \propto A^2, \end{aligned} \quad (4.13)$$

där  $h(x, t)$  är oberoende av  $A$ . Energin och amplituden mäts för vågen i 4.1 och mätvärden presenteras för läget innan studs, figur 4.2(b), och läget efter studs, figur 4.2(c). I tabell 4.1 kan det läsas av att medan amplituden har halverats så har energin ungefär blivit en fjärdedel, som förväntat.

**Tabell 4.1.** Amplitud och energi för våg med absorberande randvillkor.  $T$  är periodlängden.

Tid	0.25T	0.75T
Amplitud	0.5	0.25
Energi (normerad)	1	0.25002

## 4.2 2D experiment

I detta kapitel presenteras två resultat som påvisar den fysikaliska realism som vår metod ger. Det första experimentet är ett exempel på diffraktion som uppkommer när en våg fortplantar sig runt ett hörn eller genom en öppning. Det andra är en simulering av dopplereffekten som innebär en frekvensförändring hos en signal i rörelse, beroende på om källan avlägsnar sig eller närmar sig i förhållande till lyssnaren. Ett exempel på detta är hur man uppfattar sirentjuten från en förbiåkande ambulans.

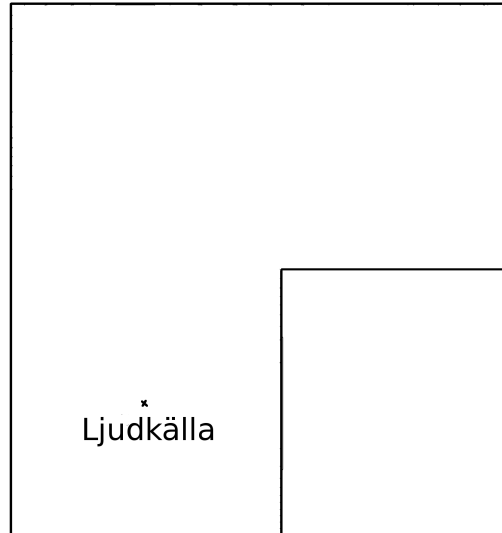
### 4.2.1 Diffraction

Ljud har mycket längre våglängd än ljus vilket gör att ljudvågor inte beter sig likt synligt ljus när det stöter på ett hinder i sin väg utan sprids på grund av diffraktion. Medan det är mörkt bakom ett hörn från en ljud- och ljuskälla så är det nödvändigtvis inte tyst. Diffraktionsgraden beror på förhållandet mellan vågens våglängd och hindrets dimensioner, ju längre våglängd desto större hinder kan vågen komma runt. En metod som ray-tracing, där man modellerar ljud som strålar, ser förbi den här fysikaliska effekten.

Källan modelleras som en sinusfunktion, just för att frekvensen hos en sådan är lätt att kontrollera

$$f(x, y) = \begin{cases} \sin\left(\frac{n\pi}{K}\right), & (x, y) = (x_0, y_0) \\ 0, & (x, y) \neq (x_0, y_0), \end{cases} \quad (4.14)$$

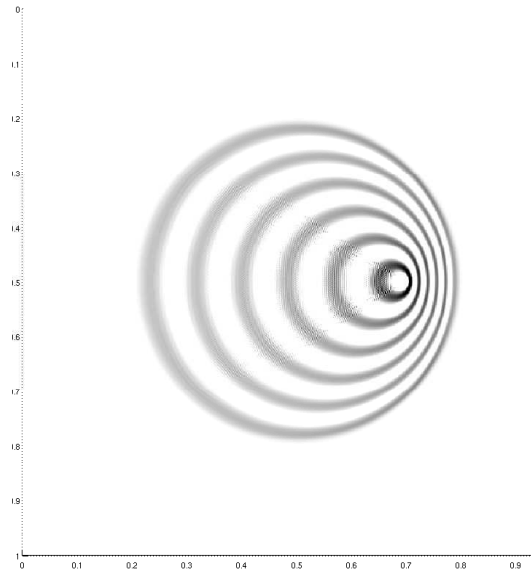
där  $n$  är det aktuella tidssteget och  $K$  är en variabel som styr frekvensen. Frekvensen hos  $f$  är omvänt proportionell mot  $K$ . Vi placerar en punktkälla i ett L-format rum enligt figur 4.2 så att en del av rummet inte kan ses från källan.

**Figur 4.2.** Punktkälla i L-format rum

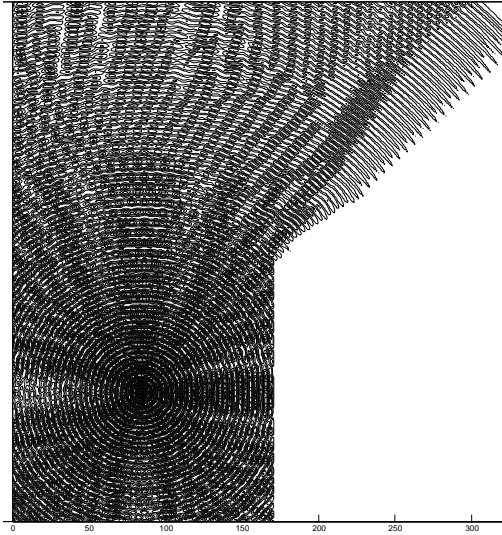
I figur 4.4 ser vi rummet ovanifrån för fyra olika värden på  $K$  då tillräckligt lång tid har gått för att vågen ska ha propagerat ut i hela rummet och stabiliserat sig runt hörnet. Vi ser att ju lägre frekvensen är desto mer diffraktion fås, tills att det i 4.4(d) saknas ljudskugga helt.

### 4.2.2 Dopplereffekten

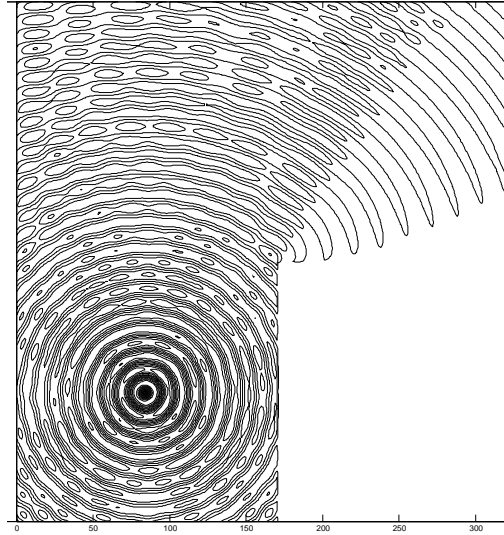
Ett annat fenomen associerat med vågor är Dopplereffekten. En ljudvågs tonhöjd beror på vågens frekvens, ju högre frekvens desto ljusare ton. Om en ljudkälla rör sig relativt en lyssnare skapar rörelsen en front framför källan med högre frekvenser och ett svall bakom källan med lägre frekvenser. En simulering av en ljudkälla som rör sig, med hastigheten en fjärdedels gridpunkt per tidssteg, presenteras i figur 4.4. Figuren visar tydligt att vågfronten i rörelseriktningen (åt höger) får en högre frekvens än bakomliggande vågsvall.

**Figur 4.4.** Dopplereffekten

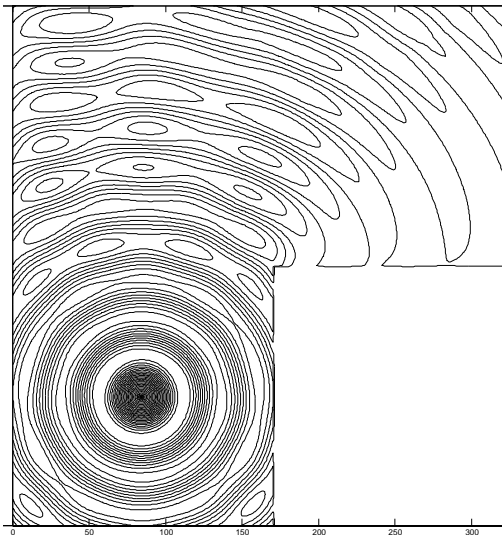
Figur 4.3. Diffraktion runt ett hörn från punktkälla vid fyra olika frekvenser.



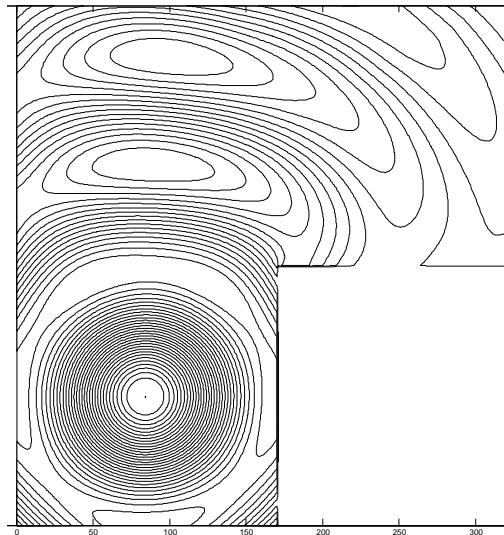
(a)  $K = 5$



(b)  $K = 13$



(c)  $K = 36$



(d)  $K = 100$



## Kapitel 5

# Diskussion

Detta kapitel diskuteras bland annat hur vår modell och hur vår metod begränsar våra simuleringar. I härledningen av vågekvationen så görs antaganden som förenklar verkligheten, dessa kommer ge avsaknad av vissa fenomen. Våra randvillkor i två dimensioner har några brister och hur dessa påverkar simuleringen tas upp.

### 5.1 Vågekvationen

Den enklaste vågekvationen man kan skriva upp är en högergående våg med konstant hastigheten  $v_0$ ,

$$u_t + v_0 u_x = 0. \quad (5.1)$$

Den här linjära ekvationen har en allmän lösning  $u = f(x - v_0 t)$  men om man låter hastigheten vara en funktion av  $u$  så får man en icke-linjär motsvarighet till (5.1). En metod baserad på vågens karaktäristikor kan användas för att lösa problemet. Detta beroende  $v = v(u)$  ger vågen en typisk icke-linjär förvrängning när den propagerar. Om  $v'(u) < 0$  så kommer låga värden av  $u$  propagera snabbare än höga värden av  $u$  och vågen kommer diffusera. Om däremot  $v'(u) > 0$  så kommer höga värden av  $u$  propagera snabbast och vågen kommer brytas [19]. Vi kommer inte se dessa fenomen i våra simuleringar. Situationer i datorspel man kan tänka sig att detta uppstår är om t.ex. om det är stora temperaturskillnader i ett rum.

Ett fenomen som dyker upp när t.ex. ett flygplan accelererar förbi ljudhastigheten är chockvågor. För en gas i jämviktsläge utan påverkan av kontaktkrafter så gäller, förutom att spänningen på ett ytelement verkar normalt på ytan och att ingen värmeledning sker, att den inre energin är en bestämd funktion av trycket och densiteten

$$e = e(p, \rho). \quad (5.2)$$

Termodynamiken ger oss då differentialformen

$$TdS = de + pd\left(\frac{1}{\rho}\right), \quad (5.3)$$

där  $T$  är temperaturen och  $S$  är entropin. Om man antar att gasen är likformig (isoterm, isobar, osv), stillastående och att alla tid- och rumsderivator är små, som vi gjorde i kapitel 2.1, så kan man härleda följande ekvation för varje partikelbana [19]

$$T \left( \frac{DS}{Dt} \right) = 0. \quad (5.4)$$

Entropin är alltså konstant i varje partikelbana. Om fluiden initialt är i jämvikt, ett antagande i vår härledning av vågekvationen, med likformig entropi  $S_{init}$  så kommer  $S = S_{init}$  för varje partikelbana och alltså fortsätta vara likformig under rörelse. Detta kallas isentropiskt flöde. Under dessa förutsättningar kommer trycket bero endast på densiteten [19], ytterligare ett antagande i kapitel 2.1. Differentialekvationen (5.4) är bara giltig i domäner där  $T$  och  $S$  är differentierbara. I en diskontinuitet kommer entropin göra ett hopp och ett från början isentropiskt flöde kommer inte så längre vara efter att diskontinuiteten passerat. Ett exempel på en sådan diskontinuitet är en chockvåg. Entropin gör ett hopp när en fluid passerar genom en chockvåg och alltså kommer vi inte se några chockvågor i våra simuleringar.

## 5.2 Randvillkor

### 5.2.1 Vågens infallsvinkel

I två dimensioner så absorberar våra absorberande randvillkor bara vågor som infaller normalt mot ytan. Den fysikaliska motsvarigheten till våra absorberande randvillkor är en endimensionell vågledare orienterad normalt mot ytan, enligt Nikunj Raghuvanshi på Microsoft Research [20]. Det förklarar varför våra absorberande randvillkor inte fungerar bra när ljudet infaller nästan parallellt mot ytan och därför försämras simulering av öppna ränder, t.ex. fönster.

### 5.2.2 Frekvensberoende absorbtion

En stor platt yta kommer inte reflektera alla frekvenser likadant eftersom ljudet propagerar genom två medier, luften och väggen. I luft propagerar alla frekvenser med ungefär samma hastighet, runt  $340 \text{ ms}^{-1}$ , men detta gäller inte för alla fasta media. I dispersiva media kan inte ljudpropageringen approximeras av en adiabatisk process, ljudvågen tappar energi och dissiperar till slut helt. Hastigheten blir då generellt frekvensberoende och detta får betydelse för reflektionen. Reflektionen vid en specifik frekvens beror på skillnaden mellan ljudets impedans i de olika materialen. Impedansen i sin tur beror inverst av ljudhastigheten så om ljudhastigheten varierar över frekvensspektrumet så kommer reflektionen variera över frekvensspektrumet. Numerisk modellering av dispersion i fasta material med ljudhastigheter tusen gånger större än luft är mycket beräkningsintensivt på grund av CFL [20].



### 5.2.3 Dirichlet- eller Neumannvillkor?

Förutom att det absorberande randvillkoret (2.25) går mot ett Neumannvillkor då  $\alpha \rightarrow 1$  så ges här en fysikalisk motivering till valet av detta för simulering av full reflektion. Vi har ju de två randvillkoren presenterade i kapitel 2.2 att välja mellan när vi ska simulera full reflektion. Antag att randen  $\sigma$  är gjord av ett fast material som tvingar en partikels hastighet i  $\sigma$ :s normalriktning,  $n \cdot \Psi(M, t)$ , till noll. Ekvationen för rörelsemängdens bevarande

$$\rho_0 \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) + \nabla u = 0, \quad (5.5)$$

visar då att  $u(M, t)$  måste uppfylla Neumannvillkoret

$$\partial_n u(M, t) = 0, \quad M \in \sigma, \forall t. \quad (5.6)$$

Antag istället att den akustiska vågen sprider sig i en vätska som är i kontakt med en gas längst med  $\sigma$ , till exempel en vattenyta. En bra approximation av en sådan rands effekt på ljudet, är att försumma överföringen av akustisk energi från vätskan till gasen [21]. Sålunda utövar gasen ett konstant tryck på randen, atmosfärtrycket i exemplet med vattenytan. Som en konsekvens blir  $u$  noll och uppfyller Diricheltvillkoret

$$u(M, t) = 0, \quad M \in \sigma, \forall t. \quad (5.7)$$

Vid simuleringar har alltså Neumannvillkoret använts eftersom vi simulerar fasta materials reflektion av ljud.

### 5.2.4 Hörn

När metoden utvidgades från en dimension till två dimensioner dök det upp en ny sorts randpunkter, hörn. Eftersom dessa hörnpunkter hör till randen borde man tilldela dem absorberande randvillkor. Det finns dock en del komplikationer när man försöker göra detta. Om två väggar är gjorda av olika material har de olika absorptionskoefficient  $\alpha$ , vilket skall väljas i hörnet? Då våra absorberande randvillkor bara verkar i en riktning, vilken riktning skall då väljas? Detta är frågor som vi inte har besvarat, men som vore intressanta att reda ut. I våra implementeringar har vi låtit hörnen uppfylla vågekvationen, analogt med elektrodynamiken där det elektriska fältet är noll i alla hörn snävare är 180 grader eftersom det vill peka normalt ut från båda sidorna om hörnet [22].



# Litteraturförteckning

- [1] Rossing T D et al. Springer Handbook of Acoustics. 1st ed. Rossing T D, editor. New York: Springer Science+Business Media; 2007.
- [2] Richard Feynmann. Lectures in Physics. vol. 1. Addison Publishing Company; 1969.
- [3] d'Alembert J. Recherches sur la courbe que forme une corde tenduë mise en vibration. Histoire de l'académie royale des sciences et belles lettres de Berlin. 1747;3:214–219.
- [4] Kinsler L, Frey A R, Coppens A B, Sanders J V. Fundamentals of Acoustics. 4th ed. New York: Wiley; 2000.
- [5] Renaut R, Fröhlich J. A Pseudospectral Chebychev Method for the 2D Wave Equation with Domain Stretching and Absorbing Boundary Conditions. Journal of Computational Physics. 196;124(0063):324–336.
- [6] Funkhouser T, Tsingos N, Carlbom I, Elko G, Sondhi M, West J E, et al. A beam tracing method for interactive architectural acoustics. Acoustical Society of America. 2004;p. 739–756.
- [7] Lodygowski T, Sumelka W. Limitations in application of finite element method in acoustic numerical simulation. Journal of theoretical and applied mechanics. 2006;44(4):849–865.
- [8] Tsingos N, Gascuel J-D. Soundtracks for Computer Animation: Sound Rendering in Dynamic Environments with Occlusions. Graphics Interface '97. 1997 May;p. 9–16.
- [9] Lehnert H. Systematic errors of the ray-tracing algorithm. Applied Acoustics. 1993;38:207–211.
- [10] Sjöberg P. Real-Time Audio Simulation with Implicit Surfaces using Sphere Tracing on the GPU. University of Skövde, School of Humanities and Informatics; 2011.

- [11] Lee V W, Kim C, Chhugani J, Deisher M, Kim D, Nguyen A D, et al. Debunking the 100X GPU vs. CPU myth: an evaluation of throughput computing on CPU and GPU. *ACM SIGARCH Computer Architecture News*. 2010 June;38:451 – 460.
- [12] Fang Q, Boas D A. Monte Carlo simulation of photon migration in 3D turbid media accelerated by graphics processing units. *Optics Express*. 2009;17:20178 – 20190.
- [13] Gjermundsen A. CPU and GPU Co-processing for Sound. Norwegian University of Science and Technology, Department of Computer and Information Science; 2010.
- [14] Raghuvanshi N, Snyder J, Mehra R, Lin M, Govindaraju N. Precomputed Wave Simulation for Real-Time Sound Propagation of Dynamic Sources in Complex Scenes. *AMC Transactions on Graphics - Proceedings of AMC SIGGRAPH 2010*. 2010 July;29(68).
- [15] Raghuvanshi N, Narain R, Lin C. Efficient and Accurate Sound Propagation Using Adaptive Rectangular Decomposition. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*. 2009 September;15:789 – 801.
- [16] Holst H. Multi-scale methods for wave propagation in heterogeneous media. Royal Institute of Technology, School of Computer Science and Communication; 2009.
- [17] Courant R, Friedrichs K, Lewy H. On the Partial Difference Equations of Mathematical Physics. *IBM Journal*. 1967 March;p. 215–234.
- [18] Gourlay M J. Fluid Simulation for Video Games (part 2). 2010 February; Available from: <http://software.intel.com/en-us/articles/fluid-simulation-for-video-games-part-2/> [cited April 18, 2012].
- [19] Whitham G B. *Linear and Nonlinear Waves*. New York: Wiley; 1974.
- [20] Raghuvanshi N. Researcher på eXtreme Computing Group, Microsoft Research;. Epostkontakt den 29e mars.
- [21] Filippi P, Habault D, Lefebvre JP, Bergassoli A. *Acoustics: Basic Physics, Theory and Methods*. London: Academic Press; 1999.
- [22] Griffiths DJ. *Introduction to electrodynamics*. 3rd ed. Prentice Hall; 1999.